

На правах рукописи



СУЛТАНОВА Галия Алиевна

**АФФИННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ КАСАТЕЛЬНЫХ
РАССЛОЕНИЙ СО СВЯЗНОСТЬЮ ПОЛНОГО ЛИФТА**

Специальность 01.01.04 — геометрия и топология

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Пенза, 2017

Работа выполнена на кафедре «Математическое образование» ФГБОУ ВО «Пензенский государственный университет».

Научный руководитель:

кандидат физико-математических наук,
профессор ФГБОУ ВО «Пензенский
государственный университет», г. Пенза
Султанов Адгам Яхиевич

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук,
профессор ФГАОУ ВПО "Национальный
исследовательский университет
«Высшая школа экономики», г. Нижний
Новгород
Жукова Нина Ивановна

кандидат физико-математических
наук, доцент ФГАОУ ВО «Казанский
(Приволжский) федеральный
университет», г. Казань
Шурыгин Вадим Вадимович

Ведущая организация:

ФГБОУ ВО «Московский
педагогический государственный
университет», г. Москва.

Защита состоится 07 сентября 2017 г. в 16 часов 00 минут на заседании диссертационного совета Д 212.081.10 при ФГАОУ ВО «Казанский (Приволжский) федеральный университет» по адресу: 420008, г. Казань, ул. Кремлевская, 35.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке ФГАОУ ВО «Казанский (Приволжский) федеральный университет» по адресу: 420008, Россия, Республика Татарстан, Казань, ул. Кремлевская, 18 и на официальном сайте Казанского (Приволжского) федерального университета: www.kpfu.ru.

Автореферат разослан "__"_____ 201__ г.

Ученый секретарь

диссертационного совета Д 212.081.10,

кандидат физико-математических наук, доцент

Липачев Е.К.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Исторический обзор и актуальность темы исследования. Теория касательных расслоений над дифференцируемыми многообразиями является одним из активно развивающихся направлений геометрии расслоенных пространств.

Касательные расслоения первого порядка гладких многообразий возникли в середине 30-х годов прошлого столетия в связи с созданием теории расслоенных пространств¹. Касательные расслоения высших порядков $T^k M$ были построены В.В. Вагнером². Он назвал их голономизированными составными многообразиями. Расслоения, включающие в себя касательные расслоения $T^k M$, названные расслоением p^v -скоростей, были построены Ш. Эресманом^{3,4}. В 1953 году А. Вейль ввел расслоения \mathbb{A} -близких точек, где \mathbb{A} – алгебра А. Вейля⁵. Касательные расслоения $T^k M$ можно истолковать как расслоения "близких точек" А. Вейля. В 1974 году А.П. Широков показал, что на $T^k M$ существует гладкая структура над алгеброй плюралных чисел $\mathbb{R}(\varepsilon^k)$ ⁶, а несколько позже А.П. Широковым и В.В. Шурыгиным были обнаружены структуры гладких многообразий на расслоениях Вейля^{7,8}.

Дифференциальная геометрия касательных расслоений начала развиваться с конца 50-х годов двадцатого века после выхода серии работ Ш. Сасаки^{9,10}. В этих работах введены вертикальные, полные лифты векторных и ковекторных полей с базы M в касательное расслоение TM . Задав на базе риманову метрику g , Ш. Сасаки построил на TM риманову метрику, которая называется в литературе метрикой Сасаки. К. Яно и Ш. Кобаяси^{11,12} ввели вертикальные, полные лифты тензорных полей и связностей с базы M в касательное расслоение TM . К. Яно и Ш. Ишихара¹³ построили горизонтальные лифты тензорных полей и связностей

¹Стиррод, Н. Топология косых произведений / Н. Стиррод. – М.: Изд-во иностранной литературы, 1953. – 274 с.

²Вагнер, В.В. Теория дифференциальных объектов и основания дифференциальной геометрии. Дополнения к книге Веблен О. и Уайтхед Дж. Основания дифференциальной геометрии / В.В. Вагнер. – М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1949. – С. 135-221.

³Ehresmann, C. Les prolongements d'une variete differentiable. I. Calcul des jets, prolongement principal / C. Ehresmann // C. E. Acad. Sci. – 1951. – № 11. – P.598 – 600.

⁴Ehresmann C. Les prolongements d'une variete differentiable. II. L'espace des jets d'ordre r de V_n^ε dans V_m / C. Ehresmann // C. E. Acad. Sci. – 1951. – № 15. – P.777 – 779.

⁵Weil, A. Theorie des points proches sur les varieties differentiables, Colloque internat. Centre nat. rech. Sci. / A. Weil // Geom. Different. – 1953. – Vol. 52– P. 111–117.

⁶Широков, А.П. Замечание о структурах в касательных расслоениях / А.П. Широков // Труды геом. сем. М. ВИНТИ АН ССР. – 1974. – Т.5.– С. 311-318.

⁷Широков, А.П. Геометрия касательных расслоений и пространства над алгебрами / А.П. Широков // Итоги науки и техн. Сер. Пробл. геом. ВИНТИ. – 1981. – №12.– С. 61–95.

⁸Шурыгин, В.В. Многообразия над локальными алгебрами, эквивалентные расслоениям струй / В.В. Шурыгин // Изв. вузов. Матем. – 1992. – №10. – С.68–79.

⁹Sasaki, Sh. On the differential geometry of tangent bundles of Riemannian manifolds. I / Sh. Sasaki // Tohoku Math. J. – 1958. – № 3. – P. 338-354.

¹⁰Sasaki, Sh. On the differential geometry of tangent bundles of Riemannian manifolds. II / Sh. Sasaki // Tohoku Math. J. – 1962. – Vol.14, № 2. – P. 146-155.

¹¹Yano, K. Prolongation of tensor fields and connective to tangent bundles. I. General theory / K. Yano, Sh. Kobayasi // J. Math. Soc. Japan. – 1966. – Vol. 18. – №2. – P. 194-201.

¹²Yano, K. Prolongation of tensor fields and connective to tangent bundles. II. Infinitesimal automorphisms / K. Yano, Sh. Kobayasi // J. Math. Soc. Japan. – 1966. – Vol. 18. – №3. – P. 236-246.

¹³Yano, K. Horisontal lifts and connections to tangent bundles / K. Yano, S. Ishihara // J. Math. and Mech. – 1967. – Vol. 16, №9. – P. 1015-1029.

в касательные расслоения. Семейство римановых метрик на TM , зависящих от трех скалярных полей, получающееся из метрики, заданной на базе расслоения, построено Ф.И. Каганом¹⁴. Метрику Сасаки и метрику полного лифта можно выделить в этом семействе как частные случаи при некоторых значениях скалярных полей.

В 1975 году Н.В. Талантова и А.П. Широков построили в касательном расслоении TM синектическую метрику, исходя из римановой метрики g и симметрического тензорного поля типа $(0,2)$, заданных на базе M .

Результаты, полученные при изучении касательных расслоений первого и второго порядков и кокасательных расслоений, изложены в монографии К. Яно и Ш. Ишихара¹⁵. Построению лифтов тензорных полей и линейных связностей с базы M в касательные расслоения $T^k M$ и в расслоения p^v -скоростей посвящены работы А. Моримото^{16,17}. Им же построено продолжение линейной связности, заданной на гладком многообразии M , в расслоения А. Вейля M^A ¹⁸. Получены условия того, что возникающие при этом связности на M^A будут локально симметрическими. Различные структуры на M^A изучались В.В. Шурыгиным и его учениками¹⁹, А.Я. Султановым²⁰, И. Коларжем, П. Михором, Й. Словаком²¹. Векторные и тензорные расслоения изучались Б.Н. Шапуковым и его учениками²². Б.Н. Шапуков построил полный лифт линейной связности на тензорных расслоениях²³. Полукасательные структуры на гладких многообразиях изучались В.В. Вишневским и его учениками^{24, 25}.

Наряду с геометрическими объектами на TM , возникающими из объектов, заданных на базе M , изучались инфинитезимальные изометрии, аффинные и проективные преобразования этих объектов.

Группы движений в римановых пространствах изучались Б. Риманом, С. Ли, Г. Фубини, И.П. Егоровым и другими геометрами. Группы проективных, аффин-

¹⁴Каган, Ф.И. Римановы метрики в касательном расслоении над римановым многообразием / Ф.И. Каган // Изв. вузов. Математика. — 1973. — №6. — С.42–51.

¹⁵Yano, K. Tangent and cotangent bundles. Differential Geometry / K. Yano, S. Ishihara. — New York, Marcel Dekker, 1973. — 423 p.

¹⁶Morimoto, A. Prolongation of connections to tangent bundles of higher order / A. Morimoto // Nagoya Math. J. — 1970. — Vol. 40. — P. 99–120.

¹⁷Morimoto, A. Liftings of some type of tensor fields and connections to tangent bundles of p^v -velocities / A. Morimoto // Nagoya Math. J. — 1970. — Vol. 40. — P. 13–31.

¹⁸Morimoto, A. Prolongation of connections to bundles of infinitely near points / A. Morimoto // J. Diff. Geom. — 1976. — Vol. 11. — P. 479–498.

¹⁹Шурыгин, В.В. Гладкие многообразия над локальными алгебрами и расслоения Вейля / В.В. Шурыгин // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз. ВИНТИ. — 2002. — Т. 73. — С. 162–236.

²⁰Султанов, А.Я. Продолжения тензорных полей и связностей в расслоения Вейля / А.Я. Султанов // Изв. вузов. Матем. — 1999. — №9. — С. 64–72.

²¹Kolar, I. Natural operation in differential geometry / I. Kolar, P. Michor, J. Slovak. — Berlin: Springer. — Verlag, 1993 — 437 p.

²²Шапуков, Б.Н. Связности на дифференцируемых расслоениях / Б.Н. Шапуков // Итоги науки и техн. Сер. Пробл. геом. — 1983. — Т. 15. — С. 61–93.

²³Шапуков, Б.Н. Лифт связности на тензорных расслоениях / Б.Н. Шапуков // Изв. вузов. Матем. — 1986. — №12. — С. 70–72.

²⁴Вишневский, В.В. Многообразия над плоральными числами и полукасательные структуры / В.В.Вишневский // Итоги науки и техники. Проблемы геометрии. ВИНТИ. — 1988. — Т. 20 — С. 35–75.

²⁵Вишневский, В.В. Пространства над алгебрами / В.В. Вишневский, А.П. Широков, В.В. Шурыгин. — Казань: Изд-во Казанского университета, 1984. — 264 с.

ных, конформных движений в псевдоримановых пространствах изучались в работах А.В. Аминовой^{26, 27, 28}. Большой вклад в теорию аффинных, проективных движений внесли И.П. Егоров²⁹, Г. Врэнчану, К. Яно и их ученики^{30, 31}.

Одной из первых работ по изучению инфинитезимальных изометрий в касательных расслоениях, снабженных римановой метрикой, являются работы Ш. Сасаки³². К. Сато³³ получил общий вид инфинитезимальных аффинных преобразований в касательных расслоениях с метрикой Сасаки. К. Яно и Ш. Кобаяси получили разложение инфинитезимальных аффинных преобразований в TM со связностью полного лифта, сохраняющих слои. Эта задача была решена и в общем случае³⁴. Они же исследовали проектируемые инфинитезимальные изометрии касательного расслоения TM с метрикой g^C полного лифта метрики g , заданной на M . Полное решение задачи разложения инфинитезимальных изометрий в TM с метрикой полного лифта g^C дал Ш. Танно³⁵.

Изучению инфинитезимальных проективных, аффинных, обобщенных конформных, гомотетических, изометрических преобразований в касательном расслоении TM , снабженном метрикой полного лифта и метрикой Сасаки посвящены работы В.Г. Подольского³⁶.

Каноническое разложение произвольных инфинитезимального проективного и аффинного преобразований на касательном расслоении TM , снабженном полным лифтом линейной связности ∇ , заданной на базе расслоения, получил Ф.И. Каган³⁷.

К. Ямагучи³⁸ рассматривал инфинитезимальные проективные и конформные преобразования в TM с метрикой полного лифта g^C над связным римановым многообразием (M, g) . Каноническое разложение инфинитезимальных аффинных преобразований в касательном расслоении TM с синектической связностью в смыс-

²⁶Аминова, А.В. Группы проективных и аффинных движений в пространствах общей теории относительности, I / А.В. Аминова // Труды геометрического семинара. ВИНТИ. – 1974. – №6. – С. 317-346.

²⁷Аминова, А.В. Группы почти проективных движений пространств аффинной связности / А.В. Аминова // Изв. вузов. Матем. – 1979. – №4. – С. 71-75.

²⁸Аминова, А.В. Проективные преобразования псевдоримановых многообразий / А.В. Аминова. – М.: Янус-К, 2003. – 619 с.

²⁹Егоров, И.П. Движения в пространствах аффинной связности / И.П. Егоров. – Казань: Изд-во Казанского гос.унив-та, 1965. – С. 5-179.

³⁰Егоров, И.П. Движения в обобщенных дифференциально-геометрических пространствах / И.П. Егоров. // Итоги науки. Алгебра. Топология. Геометрия. ВИНТИ. – 1967. – С. 375-428.

³¹Егоров, И.П. Автоморфизмы в обобщенных пространствах / И.П. Егоров // Итоги науки и техники. Проблемы геометрии. ВИНТИ. – 1980. – Т. 10. – С. 147-191.

³²Sasaki, Sh. On the differential geometry of tangent bundles of Riemannian manifolds. II / Sh. Sasaki // Tohoku Math. J. – 1962. – Vol.14, № 2. – P. 146-155.

³³Sato, K. Infinitesimal affine transformations of the tangent bundles with Sasaki metric / K. Sato // Tohoku Math. J. – 1974. – 26. – № 3. – P. 353–361.

³⁴Yano, K. Prolongation of tensor fields and connective to tangent bundles. II. Infinitesimal automorphisms / K. Yano, Sh. Kobayasi // J. Math. Soc. Japan. – 1966. – Vol. 18. – №3. – P. 236-246.

³⁵Tanno, S. Infinitesimal isometries on the tangent bundles with complete lift metric / S. Tanno // Tensor, N.S. – Vol.28. – 1974. – P. 139-144.

³⁶Подольский, В.Г. Инфинитезимальные преобразования в касательном расслоении с метрикой полного лифта и метрикой Сасаки / В.Г. Подольский // Изв. вузов. Математика. – 1976. – №9. – С. 128–132.

³⁷Каган, Ф.И. Каноническое разложение проективно-киллинговых и аффинно-киллинговых векторов на касательном расслоении / Ф.И. Каган // Матем. заметки. – 1976. – 19:2. – С. 247–258.

³⁸Yamauchi, K. Infinitesimal projective and conformal transformations in a tangent bundle / K. Yamauchi // Sci. Rep. Kagoshima Univ. – 1983. – №32. – P. 47-58.

ле А.П. Широкова получил Х. Шадыев³⁹. Синектическим метрикам и их инфинитезимальным изометриям посвящены работы С.Я. Нусь⁴⁰.

Изучению касательных расслоений и их автоморфизмов, снабженных различными геометрическими структурами, посвящена серия работ В.И. Паньженского⁴¹. Движения в касательных расслоениях TM со специальной метрикой изучала О.П. Сурина⁴². Движения в касательных расслоениях, сохраняющих ортогональную и касательную структуры, рассматривались Р.Х. Ибрагимовой⁴³. Структура алгебры Ли голоморфных векторных полей на расслоениях Вейля рассмотрена А.Я. Султановым⁴⁴. Н.Д. Никитин изучал инфинитезимальные аффинные преобразования нелинейной связности на TM ⁴⁵. Инфинитезимальные автоморфизмы почти симплектической структуры на касательном расслоении обобщенного лагранжева пространства рассматривала М.В. Сорокина⁴⁶. О.А. Монахова изучала инфинитезимальные аффинные преобразования расслоения дважды ковариантных тензоров со связностью горизонтального лифта⁴⁷. Аналогичные исследования проводились в работах Н.А. Осьминины⁴⁸, Н.И. Маниной и А.Я. Султанова⁴⁹, К.М. Буданова и А.Я. Султанова⁵⁰.

Исходя из вышеизложенного, можно сделать вывод, что тема настоящей диссертационной работы является актуальной.

Диссертация по своей теме относится к теории касательных расслоений дифференцируемых многообразий.

Целью диссертационной работы является исследование размерностей групп аффинных преобразований в касательных расслоениях со связностью полного лифта.

³⁹Шадыев, Х. Аффинная коллинеация синектической связности в касательном расслоении / Х. Шадыев // Тр.геом.сем. – 1984. – Т. 16. – С. 117-127.

⁴⁰Нусь, С.Я. Специальные римановы метрики в касательных расслоениях: Дис. на соиск. учен. степ. к.ф.-м.н.:01.01.04 / Светлана Яковлевна Нусь; Казанский гос. ун-т. – Казань, 1985. – 95 л.

⁴¹Паньженский, В.И. Инфинитезимальные автоморфизмы метрических пространств финслера типа / В.И. Паньженский // Итоги науки и техники. Сер. Соврем. математ и ее приложения. Темат. обзоры. – 2009. – Т. 123. – С. 81-109.

⁴²Сурина, О.П. О движениях в пространствах с метрикой $g_{ij}(x, y) = e^{2v(x, y)} \gamma_{ij}(x)$ / О.П. Сурина // Геометрия обобщенных пространств. Межвузовский сб. научных трудов Пенз. гос. пед. ин-та. – 1992. – С. 96-100.

⁴³Ибрагимова, Р.Х. Движения на касательных расслоениях, сохраняющие ортогональную и касательную структуры / Р.Х. Ибрагимова // Изв. вузов. Математика. – 1996. – №8. – С. 29-34.

⁴⁴Султанов, А.Я. Голоморфные аффинные векторные поля на расслоениях Вейля / А.Я. Султанов // Матем. заметки. – 2012. – 91:6. – С. 896–899.

⁴⁵Никитин, Н.Д. Инфинитезимальные движения в пространствах нелинейной связности / Н.Д. Никитин // Движения в обобщенных пространствах. Межвузовский сб. научных трудов Пенз. гос. пед. ун-та. – 1999. – С. 93-101.

⁴⁶Сорокина, М.В. Об инфинитезимальных автоморфизмах почти симплектической структуры на касательном расслоении обобщенного лагранжева пространства / М.В. Сорокина // Учен. зап. Казан. гос. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2005. – 147:1. – С. 154–158.

⁴⁷Монахова, О.А. Инфинитезимальные аффинные преобразования расслоения дважды ковариантных тензоров со связностью горизонтального лифта: дис. на соиск. учен. степ. к.ф.-м.н.:01.01.04 / Оксана Александровна Монахова; Казанский гос. ун-т. – Казань, 2004. – 105 л.

⁴⁸Осьминина, Н.А. Инфинитезимальные аффинные преобразования касательного расслоения второго порядка с синектической связностью: Дис. на соиск. учен. степ. к.ф.-м.н.:01.01.04 / Наталья Александровна Осьминина; Казанский гос. ун-т. – Казань, 2003. – 103 л.

⁴⁹Манина, Н.И., Инфинитезимальные аффинные преобразования касательного расслоения второго порядка со связностью горизонтального лифта / Н.И. Манина, А.Я. Султанов // Изв. вузов. Матем. – 2011. – №9. – С. 62–69.

⁵⁰Буданов, К.М. Инфинитезимальные аффинные преобразования расслоения Вейля второго порядка со связностью полного лифта / К.М.Буданов, А.Я.Султанов // Изв. вузов. Матем. – 2015. – №12. – С. 3–13.

Основные задачи диссертационной работы.

1. Исследование условий интегрируемости уравнений инфинитезимальных аффинных преобразований касательных расслоений со связностью полного лифта $(TM, \nabla^{(0)})$.
2. Изучение структуры алгебр Ли инфинитезимальных аффинных преобразований касательных расслоений со связностью полного лифта.
3. Установление максимальных размерностей алгебр Ли инфинитезимальных аффинных преобразований пространств $(TM, \nabla^{(0)})$ и точности этих размерностей.
4. Изучение лакун в распределении групп аффинных преобразований в касательном расслоении TM со связностью полного лифта $\nabla^{(0)}$.

Методология и методы исследования. В диссертации применяются методы локальной дифференциальной геометрии, используется аппарат тензорного анализа и производной Ли. Функции, тензорные поля предполагаются гладкими класса C^∞ , линейные связности – с нулевым тензорным полем кручения.

Научная новизна. В диссертационной работе получены следующие результаты:

1. Введены $V\gamma^r$ - и $H\gamma^r$ -лифты тензорных полей типа $(1, r)$ ($r > 1$), являющиеся обобщением $V\gamma$ - и $H\gamma$ -лифтов тензорных полей типа $(1, 1)$, и доказаны некоторые их свойства.
2. Получены точные оценки сверху размерностей алгебр Ли произвольных инфинитезимальных аффинных преобразований и выделены идеалы алгебр Ли проектируемых инфинитезимальных аффинных преобразований касательного расслоения TM со связностью полного лифта $\nabla^{(0)}$.
3. Установлена лакуна в распределении максимальных размерностей групп аффинных преобразований в касательных расслоениях со связностью полного лифта.
4. Исследованы группы аффинных преобразований над двумерными неплоскими максимально-подвижными пространствами.

Теоретическая и практическая значимость работы. Диссертационная работа носит теоретический характер. Ее результаты могут быть использованы для дальнейшего развития теории расслоенных пространств со связностями и метриками, а также в учебном процессе при чтении спецкурсов и факультативных курсов для студентов-математиков.

Апробация работы. Результаты диссертационной работы докладывались на международной конференции студентов и аспирантов "Математика и ее приложения в современной науке и практике" (Курск, ЮЗГУ, 2013), на международной

научно-технической конференции "Аналитические и численные методы моделирования естественнонаучных и социальных проблем" (Пенза, ПГУ, 2013), на международной конференции "Ломоносовские чтения на Алтае: фундаментальные проблемы науки и образования" (Барнаул, АлГУ, 2014, 2015), на международной конференции по алгебре, анализу и геометрии, посвященной юбилеям выдающихся профессоров Казанского университета, математиков Петра Алексеевича (1895-1944) и Александра Петровича (1926-1998) Широковых, и молодежной школы-конференции по алгебре, анализу, геометрии (Казань, КФУ, 2016), на геометрическом семинаре кафедры геометрии и математического анализа ПГУ (рук. проф. В.И. Паньженский и проф. А.Я. Султанов).

Основные результаты диссертации отражены в 14 опубликованных работах автора, список которых приведен в конце диссертации. Из них шесть статей опубликовано в журналах, включенных в список ВАК.

Структура и объем работы. Диссертационная работа изложена на 131 странице и состоит из введения, трех глав, содержащих 18 параграфов, библиографического списка и списка публикаций автора по теме исследования. Библиографический список содержит 66 наименований работ отечественных и зарубежных авторов.

Краткое содержание диссертации

Во введении дается обзор результатов по исследуемой проблеме и кратко формулируются основные результаты диссертации.

Первая глава диссертации посвящена изучению продолжений тензорных полей с гладкого многообразия в его касательное расслоение. §§1.1-1.4 носят реферативный характер.

В §1.1 приводится определение касательного расслоения TM над дифференцируемым многообразием M , вводятся понятия вертикального и полного лифтов функций с базы в касательное расслоение.

В §1.2 описана гладкая структура на касательном расслоении над алгеброй дуальных чисел.

В §1.3 вводятся вертикальные и полные лифты векторных и ковекторных полей на TM и доказываются некоторые их свойства, а также приводятся определения естественных лифтов тензорных полей типа $(0, s)$ и $(1, s)$ ($s \geq 1$) на TM , порожденных элементами алгебры дуальных чисел и векторным пространством линейных форм, заданных на алгебре дуальных чисел и принимающих значения в поле \mathbb{R} действительных чисел.

В §1.4 дается определение полного лифта линейной связности с многообразия

M в касательное расслоение TM , приводятся локальные компоненты связности и компоненты тензорных полей кривизны и кручения в натуральном подвижном репере. Линейную связность называют также аффинной связностью. Следует отметить, что иногда в научной литературе понятия аффинной и линейной связностей различают. Мы этого делать не будем.

§1.5 посвящен изучению вертикально-векторных поднятий тензорных полей типа $(1, 1)$ с базы в касательное расслоение. Вычислены коммутаторы $V\gamma$ -лифтов, вертикальных и полных лифтов векторных полей на TM , приведенных в §1.3, необходимые для исследования инфинитезимальных аффинных преобразований, а также доказаны некоторые их свойства.

В §1.6 вводится обобщение $V\gamma$ -лифтов – $V\gamma^r$ -лифты тензорных полей типа $(1, r)$ ($r > 1$) на касательном расслоении и доказываются их свойства.

В §1.7 рассматриваются горизонтально-векторные поднятия тензорных полей типа $(1, 1)$, а в §1.8 определен $H\gamma^r$ -лифт тензорных полей типа $(1, r)$ ($r > 1$) с M в TM , являющийся обобщением $H\gamma$ -лифта тензорного поля типа $(1, 1)$, введенного Ш.Танно в 1974 году. Для этих лифтов вычислены производные Ли и ковариантные производные относительно вертикальных и полных лифтов векторных полей на TM .

Во второй главе исследуются инфинитезимальные аффинные преобразования касательных расслоений со связностью полного лифта над непроективно-евклидовой базой.

В §§2.1-2.2 рассмотрены условия интегрируемости уравнений инфинитезимальных аффинных преобразований с учетом структуры канонического разложения произвольного инфинитезимального аффинного преобразования пространства TM , снабженного связностью полного лифта $\nabla^{(0)}$. Доказано, что каноническое разложение единственно. Получены необходимые и достаточные условия, накладываемые на тензорные поля, участвующие в этом разложении.

В §2.3 исследуется структура алгебры Ли \tilde{L} инфинитезимальных аффинных преобразований касательных расслоений со связностью полного лифта.

В §§2.4-2.5 получены точные оценки сверху размерностей алгебр Ли \tilde{L} инфинитезимальных аффинных преобразований пространств $(TM, \nabla^{(0)})$ с непроективно-евклидовой базой. Доказаны

Теорема 2.4.2. *Максимальная размерность алгебры Ли \tilde{L} инфинитезимальных аффинных преобразований касательного расслоения TM со связностью полного лифта $\nabla^{(0)}$ над непроективно-евклидовым пространством Схоутена-Стройка первого типа равна точно $4n^2 - 9n + 14$ ($n > 2$), где n – размерность базы M .*

Теорема 2.5.1. *Максимальная размерность алгебры Ли \tilde{L} инфинитези-*

мальных аффинных преобразований касательного расслоения TM со связностью полного лифта $\nabla^{(0)}$ над непроективно-евклидовой базой Схоутена-Стройка второго типа не больше $4n^2 - 13n + 22$ ($n > 3$), где n – размерность базы M .

В третьей главе изучаются группы аффинных преобразований и их алгебры Ли инфинитезимальных аффинных преобразований касательных расслоений TM , снабженных полными лифтами $\nabla^{(0)}$ линейных связностей ∇ без кручения, заданных на базе M , при условии, что связность ∇ является проективно-евклидовой.

В §3.1 установлена максимальная размерность алгебр Ли \tilde{L} инфинитезимальных аффинных преобразований в случае, когда база M является эквипроективным пространством. А именно, доказана

Теорема 3.1.3. *Максимальная размерность алгебр Ли инфинитезимальных аффинных преобразований пространства $(TM, \nabla^{(0)})$ над проективно-евклидовой базой (M, ∇) , тензорное поле Риччи которой симметрическое, равна точно $2n^2 + 1$ ($n > 2$), где n – размерность базы M .*

В §3.2 исследуются вопросы об установлении верхней границы размерности алгебры Ли \tilde{L} инфинитезимальных аффинных преобразований в $(TM, \nabla^{(0)})$ с проективно-евклидовой базой с несимметрическим тензорным полем Риччи. Доказаны следующие утверждения:

Теорема 3.2.1. *Если база расслоения (M, ∇) является проективно-евклидовым пространством, то любое инфинитезимальное аффинное преобразование \tilde{X} касательного расслоения TM со связностью полного лифта $\nabla^{(0)}$ имеет вид:*

$$\tilde{X} = X^{(0)} + Y^{(1)} + G^{V\gamma},$$

где $X, Y \in \mathfrak{S}_0^1(M)$, $G \in \mathfrak{S}_1^1(M)$.

Теорема 3.2.3. *Пусть ∇ – линейная связность, заданная на базе M расслоения TM такая, что $\text{rang Ric}^+ = 1$, $\text{rang Ric}^- = 2$ и существуют векторные поля X, Y , заданные в некоторой окрестности U точки $p \in M$, составляющие линейно-независимую систему, причем $[X, Y] = 0$, удовлетворяющие условию:*

$$\text{Ric}^+(X, X) \neq 0, \text{Ric}^-(X, Y) \neq 0.$$

Тогда максимальная размерность алгебр Ли \tilde{L} инфинитезимальных аффинных преобразований пространства $(TM, \nabla^{(0)})$ равна точно $2n^2 - 2n + 3$ ($n > 2$), где n – размерность базы M .

Теорема 3.2.4. *Пусть ∇ – линейная связность, заданная на базе M расслоения TM такая, что $\text{rang Ric}^+ = 1$, $\text{rang Ric}^- = 2$ и для любых векторных полей X, Y выполняется следующее условие:*

$$\text{если } \text{Ric}^+(X, X) \neq 0, \text{ то } \text{Ric}^-(X, Y) = 0.$$

Тогда размерность алгебр Ли \tilde{L} инфинитезимальных аффинных преобразований пространств $(TM, \nabla^{(0)})$ не превосходит $2n^2 - 4n + 7 (n > 2)$, где n – размерность базы M .

Как следствие этих теорем доказана

Теорема 3.2.5. Максимальная размерность алгебр Ли инфинитезимальных аффинных преобразований касательного расслоения TM со связностью полного лифта $\nabla^{(0)}$ над проективно-евклидовой базой с несимметрическим тензорным полем Риччи равна $2n^2 - 2n + 3 (n > 2)$.

В §3.3 описаны проектируемые аффинные векторные поля и идеалы алгебры Ли проектируемых инфинитезимальных аффинных преобразований касательных расслоений со связностью полного лифта. Доказано

Предложение 3.3.2. В алгебре Ли K_1 всех проектируемых инфинитезимальных аффинных преобразований вида $X^{(0)} + Y^{(1)} + G^{V\gamma}$, где $X, Y \in \mathfrak{S}_0^1(M)$, $G \in \mathfrak{S}_1^1(M)$ касательного расслоения TM со связностью $\nabla^{(0)}$ можно выделить цепочку вложенных идеалов

$$K_1 \supset K_{11} = \{Y^{(1)} + G^{V\gamma}\} \supset L^1 = \{Y^{(1)}\}.$$

Идеал L^1 является также идеалом алгебры K_1 .

Показано, что в общем случае последний идеал L^1 в этой цепочке вложенных идеалов может и не быть идеалом исходной алгебры K_1 .

§3.4 посвящен установлению максимальной размерности алгебр Ли \tilde{L} инфинитезимальных аффинных преобразований и исследованию лакун в распределении групп аффинных преобразований пространств $(TM, \nabla^{(0)})$. Доказаны следующие утверждения:

Теорема 3.4.1. Максимальная размерность алгебр Ли инфинитезимальных аффинных преобразований в касательных расслоениях TM со связностью полного лифта $\nabla^{(0)}$ с ненулевым тензорным полем кривизны равна точно $4n^2 - 9n + 14 (n > 2)$.

Теорема 3.4.2. Максимальная размерность групп аффинных преобразований в касательных расслоениях TM со связностью полного лифта $\nabla^{(0)}$ связности ∇ с ненулевым тензорным полем кривизны равна точно $4n^2 - 9n + 14 (n > 2)$.

Теорема 3.4.3. Не существует касательного расслоения TM со связностью полного лифта $\nabla^{(0)}$, где ∇ – проективно-евклидова линейная связность, группа аффинных преобразований которого имеет максимальную размерность r , удовлетворяющую неравенствам

$$2n^2 - 2n + 3 < r < 2n^2 - 1 (n > 2).$$

Теорема 3.4.4. *Не существует касательного расслоения TM со связностью полного лифта $\nabla^{(0)}$, группа аффинных преобразований которого имеет максимальную размерность r , удовлетворяющую неравенствам*

$$4n^2 - 9n + 14 < r < 2n(2n + 1)(n > 2).$$

В §3.5 исследованы максимальные размерности групп аффинных преобразований пространств $(TM_2, \nabla^{(0)})$, когда база M является двумерным максимально-подвижным пространством линейной связности.

Доказаны

Теорема 3.5.4. *Алгебра Ли всех инфинитезимальных аффинных преобразований касательного расслоения TM_2 , снабженного полным лифтом максимально-подвижной линейной связности с ненулевым тензорным полем кривизны, имеет размерность 9.*

Теорема 3.5.5. *Группа аффинных преобразований касательного расслоения TM_2 , снабженного полным лифтом максимально-подвижной линейной связности с ненулевым тензорным полем кривизны, имеет размерность 9.*

И.П. Егоровым установлено три типа двумерных максимально-подвижных пространств линейной связности. В диссертации исследован вопрос о разрешимости алгебр Ли инфинитезимальных аффинных преобразований над этими пространствами. Доказана

Теорема 3.5.6. *Алгебры Ли \tilde{L} инфинитезимальных аффинных преобразований пространств $(TM_2, \nabla^{(0)})$ над двумерными максимально-подвижными пространствами (M_2, ∇) являются разрешимыми.*

ПУБЛИКАЦИИ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Работы, опубликованные в ведущих рецензируемых научных журналах и изданиях (в соответствии с Перечнем ВАК)

1. Султанова, Г.А. О некоторых свойствах лифтов тензорных полей в касательных расслоениях / Г.А. Султанова // Вестник педагогического университета. - Душанбе, 2013. - №5(54). - С. 87-89.
2. Султанова, Г.А. Некоторые лифты тензорных полей типа $(1, r)$ с базы в его касательное расслоение / Г.А. Султанова // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физ.-мат. науки. - 2014. - №1(29). - С. 54-63.
3. Султанов, А.Я. Оценка размерностей алгебры Ли инфинитезимальных аффинных преобразований касательного расслоения $T(M)$ со связностью полного лифта / А.Я. Султанов, Г.А. Султанова // Ученые записки Казанского университета. Сер. Физ.-мат. науки. - 2014. - Том 156. - Книга 2. - С. 43-54.
4. Султанова, Г.А. О горизонтально-векторных поднятиях тензорных полей с базы в ее касательное расслоение / Г.А. Султанова // Вестник БФУ им. И.Канта. Сер. Физ.-мат. науки. - 2015. - Вып. №10. - С. 80-89.
5. Султанова, Г.А. О размерностях алгебр Ли автоморфизмов в касательных расслоениях со связностью полного лифта над проективно-евклидовой базой / Г.А. Султанова // Дальневост. матем. журн. - 2016. - Т.16. - №1. - С. 83-95.
6. Султанова, Г.А. Об алгебрах Ли инфинитезимальных аффинных преобразований в касательных расслоениях со связностью полного лифта / Г.А. Султанова // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физ.-мат. науки. - 2016. - №4(40). - С. 38-50.

Работы, опубликованные в других изданиях

7. Султанова, Г.А. Условия интегрируемости уравнений движений в касательном расслоении со связностью полного лифта / Г.А. Султанова // Материалы II Международной конференции студентов и аспирантов "Математика и ее приложения в современной науке и практике". - Курск, 2013. - С. 83-86.
8. Султанова, Г.А. Моделирование касательных расслоений расслоениями Вейля / Г.А. Султанова // VIII Международная научно-техническая конференция "Аналитические и численные методы моделирования естественнонаучных и социальных проблем"(АЧМ-2013). - Пенза, 2013. - С. 72-78.

9. Султанова, Г.А. Свойства $H\gamma$ -лифтов тензорных полей типа $(1,1)$ в касательных расслоениях / Г.А. Султанова // Вопросы образования и науки: теоретический и методический аспекты: сб. науч. тр. по мат-лам Междунар. науч.-практ. конф. 31 мая 2014 г. – Тамбов, 2014. – Часть 9. – С. 139-142.
10. Султанова, Г.А. О некоторых подалгебрах алгебры Ли инфинитезимальных аффинных преобразований касательного расслоения TM со связностью полного лифта / Г.А. Султанова // Сборник научных статей международной конференции "Ломоносовские чтения на Алтае: фундаментальные проблемы науки и образования". Секция "Анализ, геометрия и топология". – Барнаул : Изд-во Алт. ун-та, 2014. – С. 378-381.
11. Султанова, Г.А. О некоторых свойствах $H\gamma^r$ -лифтов тензорных полей типа $(1, r)$, $(r > 1)$ с базы в его касательное расслоение / Г.А. Султанова // Сборник научных статей международной конференции "Ломоносовские чтения на Алтае: фундаментальные проблемы науки и образования". Секция "Анализ, геометрия и топология". – Барнаул : Изд-во Алт. Ун-та, 2015. – С. 563-566.
12. Султанова, Г.А. О группах движений в касательных расслоениях со связностью полного лифта над двумерными максимально подвижными пространствами аффинной связности / Г.А. Султанова // Диф. геом. многообразий фигур. – 2015. – Вып.46. – С. 153-161.
13. Султанова, Г.А. Движения в касательных расслоениях со связностью полного лифта над проективно-евклидовой базой / Г.А. Султанова // Материалы межд. конф. по алгебре, анализу и геометрии, посвященной юбилеям проф. Казанского ун-та математиков П.А. и А.П. Широковых, и молодежной школы-конференции по алгебре, анализу, геометрии. – 2016. – С. 322-323.
14. Султанова, Г.А. Об оценке размерностей алгебр Ли инфинитезимальных автоморфизмов касательных расслоений со связностью полного лифта над непроективно-евклидовой базой / Г.А. Султанова // Диф. геом. многообразий фигур. – 2016. – Вып.47. – С. 146-153.